# Interro n°5 - Correction

*Durée : 60 minutes. Aucun document et appareil électronique n'est autorisé.*

**Exercice 1** *(1 + 1 + 1 pts)*

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes et préciser quelle(s) équation(s) admet(tent) une unique solution.

1. $2y' + 4y = 0$, avec $y(1) = -3$.
   Il s'agit d'une équation différentielle homogène (sans second membre) avec condition initiale, ce qui implique que cette équation admet une solution unique.
   On peut réécrire cette équation sous la forme :
   $$y' + 2y = 0, \text{ de la forme } y' + \alpha y = 0 \text{ avec } \alpha = 2.$$
   Une primitive de $\alpha$ est $A(x) = 2x$, donc une solution de cette équation différentielle est de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$, pour $C \in \mathbb{R}$. La condition $y(1) = -3$ nous permet de trouver la valeur de $C$. On a :
   $$y(1) = -3 \Rightarrow C\mathrm{e}^{-2} = -3 \Rightarrow C = -3\mathrm{e}^2.$$
   Donc l'unique solution de cette équation différentielle est $y(x) = -3\mathrm{e}^{-2(x-1)}$.
2. $y' - y = (x+1)e^x$.
   Il s'agit d'une équation différentielle avec second membre, donc $y(x) = y_C(x) + y_p(x)$, où $y_C(x)$ est une solution de l'équation homogène associée et $y_p(x)$ une solution particulière.
   - Solution homogène :
     $y' - y = 0$ a pour solution générale $y_C(x) = C\mathrm{e}^x$, $C \in \mathbb{R}$.
   - Solution particulière :
     Le second membre de cette équation est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, donc la solution particulière est de la forme $y_p(x) = Q(x)\mathrm{e}^x$, avec $Q$ un polynôme à déterminer. On a que $y_p'(x) = Q'(x)\mathrm{e}^x + Q(x)\mathrm{e}^x$ et en l'injectant dans l'équation, on obtient :
     $$Q'(x)\mathrm{e}^x + Q(x)\mathrm{e}^x - Q(x)\mathrm{e}^x = Q'(x)\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x.$$
     Comme $\mathrm{e}^x > 0$, on a : $Q'(x) = x + 1$, donc on peut choisir $Q(x) = \frac{x^2}{2} + x$, et on a donc que $y_p(x) = (\frac{x^2}{2} + x)\mathrm{e}^x$.

   Finalement, on trouve que $y(x) = y_C(x) + y_p(x) = C\mathrm{e}^x + (\frac{x^2}{2} + x)\mathrm{e}^x$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc donné par :
   $$\left\{ y : x \mapsto \left( \frac{x^2}{2} + x + C \right) \mathrm{e}^x, \, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
3. $y' + 4y = x^2$.
   Il s'agit d'une équation différentielle avec second membre, donc $y(x) = y_C(x) + y_p(x)$, où $y_C(x)$ est une solution de l'équation homogène associée et $y_p(x)$ une solution particulière.
   - Solution homogène :
     $y' + 4y = 0$ a pour solution générale $y_C(x) = Ce^{-4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Solution particulière :
  Le second membre est un polynôme de second degré, donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$, et en substituant dans l'équation, on obtient :
  $$4ax^2 + (2a + 4b)x + (b + 4c) = x^2.$$
  Par identification des coefficients, on obtient :
  $$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 4b = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$
  D'où : $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{8}, c = \frac{1}{32}$. Ainsi, $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$.

Finalement, $y(x) = y_C(x) + y_p(x) = Ce^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$. L'ensemble des solutions est donc :
$$\left\{ y : x \mapsto Ce^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32},\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exercice 2** *(1 + 2 + 1 + 1 pts)*

1. On considère les intégrales suivantes :
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \sin(t))}{t^{3/2}}\, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos(t))}{(\frac{\pi}{2} - t)^{3/2}}\, dt.$$
   (a) Déterminer la nature de l'intégrale $I$.
   Soit $f : t \in ]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{\ln(1+\sin(t))}{t^{3/2}}$. $f$ est définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et positive car pour $t \in ]0, \frac{\pi}{2}], 0 < \sin(t) \leq 1$, et donc $\ln(1 + \sin(t)) > 0$.
   On a : $\ln(1 + \sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} t$, alors $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$.
   $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale convergente.
   Ainsi, d'après le critère d'équivalence, on déduit que $I$ est convergente.
   (b) À l'aide d'un changement de variable, déduire la nature de l'intégrale $J$.
   *On veillera à bien justifier l'utilisation du changement de variable.*
   Soit $g : t \mapsto \frac{\ln(1+\cos(t))}{(\frac{\pi}{2}-t)^{3/2}}$. $g$ est définie, continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ (car pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos(t) \leq 1$).
   On peut faire le changement de variable sur $I$ ou $J$ au choix.
   Soit $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. On fait le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, on a $ds = -dt$ et les bornes deviennent $\frac{\pi}{2} - x$ et $0$, et on obtient
   $$\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{0} \frac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^{3/2}} (-ds) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{\ln(1 + \cos(s))}{\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^{3/2}}\, ds.$$
   Donc
   $$I = \lim_{x\to 0} \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt = \lim_{x\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{\ln(1 + \cos(s))}{\left(\frac{\pi}{2} - s\right)^{3/2}}\, ds = J,$$
   d'où $J$ converge.
2. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

On considère la série alternée de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

- La suite $a_n = \dfrac{1}{n\ln(2n)}$ est positive.
- On a $n\ln(2n) \to +\infty$, donc $a_n \to 0$.
- La suite $a_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.

D'après le critère des séries alternées, la série converge.

(b) $\sum \frac{\ln n}{n(\ln(n)^2+1)}$.

On remarque qu'il s'agit d'une série à termes positifs (à partir de $n = 2$) et que lorsque $n \to +\infty$, $\ln(n)^2 + 1 \sim \ln(n)^2$. Ainsi,

$$\frac{\ln(n)}{n(\ln(n)^2+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n\ln(n)^2} = \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, donc par le critère de comparaison, la série qui nous intéresse diverge.

**Exercice 3** *(2 + 1 pts)*

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, et $f : E \to E$ définie par

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que $f$ est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.

- Linéarité :
  Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
  $f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)+(1-X)(P'+\lambda Q') = P+(1-X)P'+\lambda\Big(Q+(1-X)Q'\Big) = f(P)+\lambda f(Q).$
- Base de $\mathrm{Ker} f$ :
  On cherche $P \in E$ tel que $f(P) = 0 \iff P + (1-X)P' = 0$. C'est une équation différentielle :$(1-X)P' = -P$. Si $P \neq 0$, on obtient $\frac{P'}{P} = \frac{-1}{1-X}$. On trouve donc $P(X) = C(1-X)$ et alors $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1-X)$.
- Base de $\mathrm{Im} f$ :
  Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f) = (n+1) - 1 = n$. De plus, pour tout $P$, $f(P)(1) = P(1)$. Ainsi, une base possible est :
  $$\Big(1, (1-X)^2, (1-X)^3, \dots, (1-X)^n\Big)$$
  .

2. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1,0,t), (1,1,t), (t,0,1)\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs $(1,0,t), (1,1,t)$, et $(t,0,1)$. Ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si le déterminant de la matrice associée est non nul :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(1\cdot 1 - t\cdot 0) + t(1\cdot 0 - 1\cdot t) = 1 - t^2.$$

Donc ces vecteurs forment une base si et seulement si

$$1 - t^2 \neq 0 \iff t \neq 1 \,\mathrm{et}\, t \neq -1.$$