Interro n°4 (sujet A) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document et appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 2 *(2 + 2 pts)*

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,dy.$$

Pour tout $y \in [2,3]$, $y-1>0$, donc la fonction $y \mapsto \frac{y}{\sqrt{y-1}}$ est continue sur $[2,3]$.
On a donc que I est bien définie.
Par intégration par partie, nous avons

$$I = \int_2^3 y\frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = \left[y\,2\sqrt{y-1}\right]_2^3 - 2\int_2^3 \sqrt{y-1}\,dy.$$

Or, $\left[y\,2\sqrt{y-1}\right]_2^3 = 3.2\sqrt{2} - 2.2\sqrt{1} = 6\sqrt{2}-4$ et en remarquant que $\sqrt{y-1}$ est de la forme $u'u^n$, nous avons que

$$\int_2^3 \sqrt{y-1}\,dy = \left[\frac{2}{3}(y-1)^{3/2}\right]_2^3 = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Finalement, on trouve

$$I = 6\sqrt{2} - 4 - 2\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{10\sqrt{2}-8}{3}.$$

2. L'intégrale suivante est-elle convergente ? Si oui, la calculer.

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2+2t+1}\,dt.$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2t^2+2t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, on remarque que f est positive avec $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$. Or, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge ($\alpha = 2 > 1$), donc par le critère d'équivalence on a que J est convergente.
Pour calculer J, on calcule pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2t^2+2t+1}\,dt = \int_0^x \frac{2}{1+(2t+1)^2}\,dt = \left[\arctan(2t+1)\right]_0^x = \arctan(2x+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Puis $J = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 *(2 + 2 pts)*

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
   Quelle est la nature de cette série ?
   Il est important de remarquer que pour tout $n \geq 1$, $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0$. Donc le terme générale u_n de la série que l'on étudie est positif (le cas n=0 n'est pas défini). Par ailleurs, lorque $n \to +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ et $\frac{1}{n} \to 0$. Ainsi, on a que :
   $$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
   Donc
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
   Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($\alpha = 3/2 > 1$), donc par le critère d'équivalence, on en déduit que la série de terme générale u_n est convergente.
2. Calculer la somme de la série suivante :
   $$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Soit $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=3}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sum_{n=3}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\frac{1}{\sqrt{N}} + \sum_{n=3}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}}.
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Interro n°4 (sujet B) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document et appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 2 *(2 + 2 pts)*

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{0} (-2a+1)\mathrm{e}^{-a}\,da.$$

Pour tout $a \in [-1, 0]$, la fonction $a \mapsto (-2a+1)\mathrm{e}^{-a}$ est continue donc I est bien définie.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} (-2a+1)\mathrm{e}^{-a}\,da = \int_{-1}^{0} -2a\mathrm{e}^{-a}\,da + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-a}\,da = -2\int_{-1}^{0} a\mathrm{e}^{-a}\,da + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-a}\,da \\ &= -2[-a\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-a}\,da + [-\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} = 2[a\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} + 2[\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} - [\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} \\ &= [(2a+1)\mathrm{e}^{-a}]_{-1}^{0} = 1e^{0} - (-1)e^{1} = 1 + e. \end{aligned}$$

2. L'intégrale suivante est-elle convergente ? Si oui, la calculer.

$$J = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2t^2 + 2t + 1}\,dt.$$

Cf. sujet A, exercice 2 question 2.

Exercice 3 *(2 + 2 pts)*

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{\ln(5n)}$.
Quelle est la nature de cette série ?
Il est important de remarquer que pour tout $n \geq 1$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Ainsi, le terme général s'écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(5n)}.$$

La série est donc une série alternée. Par ailleurs, lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{\ln(5n)} \to 0$. De plus, la suite $(\frac{1}{\ln(5n)})_n$ est décroissante donc les conditions du critère des séries alternées sont vérifiées. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

2. Calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Cf. sujet A, exercice 3 question 2.