

Interro n°3 (sujet A) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document et appareil électronique n'est autorisé.

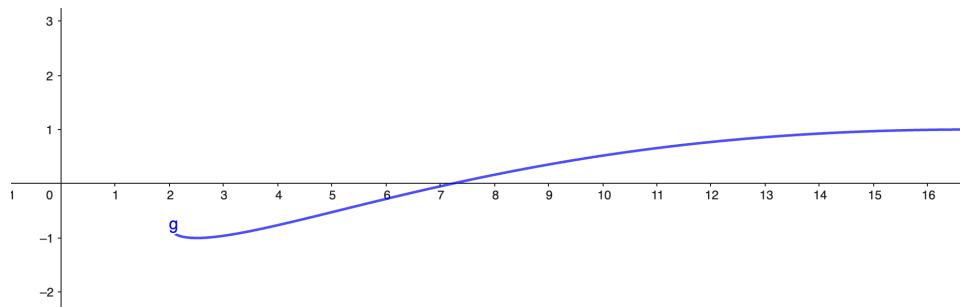
Exercice 1 (2 pts)

Tracer la fonction

$$g(x) = \sin(\sqrt{x-2} + 4).$$

On pensera à :

- trouver le domaine de définition de la fonction,
 - calculer les limites de g aux bornes du domaine,
 - déterminer le signe/variations de la fonction,
 - calculer certaines valeurs remarquables.
-
- La fonction racine carrée impose $x - 2 \geq 0$ donc $x \geq 2$, donc le domaine de définition est $D_g = [2, +\infty[$.
 - En $x = 2$: la fonction est continue en 2, donc $g(2) = \sin(\sqrt{2-2} + 4) = \sin(4)$. Quand $x \rightarrow +\infty$: on a $\sqrt{x-2} \rightarrow +\infty$ donc $\sqrt{x-2} + 4 \rightarrow +\infty$. La fonction sinus étant périodique, la fonction g n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ et oscille entre -1 et 1 .
 - On pose $u(x) = \sqrt{x-2} + 4$. Alors $g(x) = \sin(u(x))$. La fonction u est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ car $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$.



Exercice 2 (2 + 2 pts)

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

Posons f la fonction telle que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$. f est définie et continue sur $[0, 1/2]$, donc l'intégrale I existe.

En remarquant que $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, on peut écrire

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer. En calculant, on trouve que $a = b = \frac{1}{2}$ et on a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [-\ln(1-x) + \ln(1+x)]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

2. En effectuant le changement de variable $x = \sin \theta$, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta.$$

La fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est C^1 sur $[0, \pi/6]$. En posant $x = \sin(\theta)$, on a que $dx = \cos(\theta)d\theta$. Ainsi,

$$\frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} dx = \frac{1}{1-x^2} dx.$$

De plus, pour $\theta = 0$, on a $x = 0$ et pour $\theta = \pi/6$, on a $x = 1/2$. Donc

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Exercice 3 (1 + 2 + 2 pts)

1. Énoncer le critère de Riemann.
On prendra soin de distinguer les différents cas.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$.

2. Calculer l'intégrale impropre suivante :

$$K = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} + [-e^{-x}]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2xe^{-x} = 1. \end{aligned}$$

3. L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$F = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]1, +\infty[$. En $+\infty$, on a que : $0 \leq \frac{\ln t}{t^2+1} \leq \frac{\ln t}{t^2}$. Or, pour $t \geq 1$, on a $\ln t \leq \sqrt{t}$, donc $0 \leq \frac{\ln t}{t^2+1} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}$. On a que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge (car $\alpha = 3/2 > 1$). Ainsi, par critère de comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on a que la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc F converge.

Interro n°3 (sujet B) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document et appareil électronique n'est autorisé.

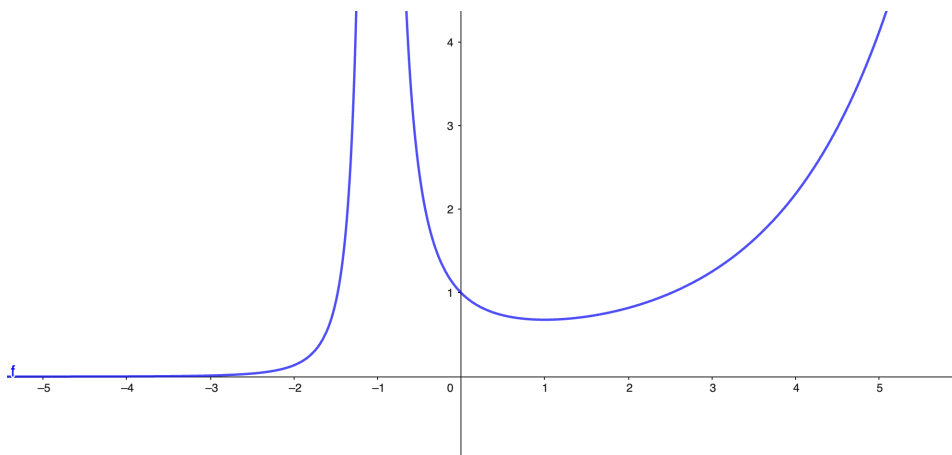
Exercice 1 (2 pts)

Tracer la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}.$$

On pensera à :

- trouver le domaine de définition de la fonction,
 - calculer les limites de g aux bornes du domaine,
 - déterminer le signe et les variations de la fonction,
 - calculer certaines valeurs remarquables.
-
- La fonction est définie lorsque le dénominateur est non nul : $(1+x)^2 \neq 0$ donc $x \neq -1$. Alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - Lorsque $x \rightarrow -1$: on a $(1+x)^2 \rightarrow 0^+$ et $e^x \rightarrow e^{-1} > 0$, donc $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2} \rightarrow +\infty$. Ainsi, la droite $x = -1$ est une asymptote verticale.
 - Lorsque $x \rightarrow +\infty$: $e^x \gg x^2$, donc $\frac{e^x}{(1+x)^2} \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - Lorsque $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $(1+x)^2 \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Ainsi, la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à gauche.
 - On dérive f : $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3}$. Comme $e^x > 0$, le signe dépend de $\frac{x-1}{(1+x)^3}$. Alors sur $(-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$, sur $(-1, 1)$: $f'(x) < 0$ et sur $(1, +\infty)$: $f'(x) > 0$.
 - $f(0) = \frac{1}{1} = 1$, et $f(1) = \frac{e}{4}$.



Exercice 2 (1 + 2 + 2 pts)

1. Énoncer le critère de Riemann.
On prendra soin de distinguer les différents cas.
[Cf. sujet A, exercice 3 question 1.](#)
2. Calculer l'intégrale impropre suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} te^{-t} dt.$$

$$\begin{aligned} K &= \int_1^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left([-te^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left([-te^{-t}]_1^x + [-e^{-t}]_1^x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2e^{-1} - (x+1)e^{-x} \right) = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

3. L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 3} dt.$$

[Cf. sujet A, exercice 3 question 3.](#)

Exercice 3 (2 + 2 pts)

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

[Cf. sujet A, exercice 2 question 1.](#)

2. En effectuant le changement de variable $x = \sin \theta$, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta.$$

[Cf. sujet A, exercice 2 question 2.](#)