

Interro n°1 (sujet A) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document ni appareil électronique ne sont autorisés.

Exercice 1 (2 + 1 pts)

Soit F l'ensemble défini par $F = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F .

$F = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(2, 1, 3) + b(1, -1, -1) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
et donc $F = \text{Vect}((2, 1, 3), (1, -1, -1))$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Les vecteurs $(2, 1, 3)$ et $(1, -1, -1)$ sont non colinéaires, donc ils forment une base de F .

Exercice 2 (1 + 2 + 2 + 1 + 1 pts)

On se place sur $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3, et on considère l'application f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \longmapsto (1 - 3X)P + X^2P'. \end{cases}$$

1. Justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.
On a $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$ et donc $X^2P' = a_1X^2 + 2a_2X^3 + 3a_3X^4$.
Ainsi, $(1 - 3X)P + X^2P' = (1 - 3X)(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) + a_1X^2 + 2a_2X^3 + 3a_3X^4$
 $= a_0 + (a_1 - 3a_0)X + (a_2 - 2a_1)X^2 + (a_3 - a_2)X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= (1 - 3X)(\alpha P + \beta Q) + X^2(\alpha P + \beta Q)' \\ &= (1 - 3X)(\alpha P + \beta Q) + X^2(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(1 - 3X)P + \beta(1 - 3X)Q + \alpha X^2P' + \beta X^2Q' \\ &= \alpha((1 - 3X)P + X^2P') + \beta((1 - 3X)Q + X^2Q') \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire et est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. (a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, et P_0 le polynôme nul.

— Déterminons $\text{Ker } f$:

$$\begin{aligned} f(P) = P_0 &\Leftrightarrow (1 - 3X)P + X^2P' = P_0 \\ &\Leftrightarrow a_0 + (a_1 - 3a_0)X + (a_2 - 2a_1)X^2 + (a_3 - a_2)X^3 = P_0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 - 3a_0 = 0 \\ a_2 - 2a_1 = 0 \\ a_3 - a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker } f = \{P_0\}$.

— Déterminons $\text{Im } f$:

La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On a donc :

$\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{Vect}(1 - 3X, X - 2X^2, X^2 - X^3, X^3)$.

Ces quatre polynômes sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de $\text{Im } f$.

4. (b) Le théorème du rang est-il vérifié ?

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

Or, $\dim(\text{Ker } f) = 0$ et $\dim(\text{Im } f) = 4$, donc le théorème du rang est vérifié.

5. Montrer que f est une application bijective.

On a $\text{Ker } f = \{P_0\}$, donc f est injective. De plus, $\dim(\text{Im } f) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, donc f est surjective. Ainsi, f est bijective.

Interro n°1 (sujet B) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document ni appareil électronique ne sont autorisés.

Exercice 1 (2 + 1 pts)

Soit G l'ensemble défini par $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de G .

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3z - 2x\}$
 $= \{x(1, -2, 0) + z(0, 3, 1) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 3, 1))$. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs $(1, -2, 0)$ et $(0, 3, 1)$ sont non colinéaires, donc ils forment une base de G .

Exercice 2 (1 + 2 + 2 + 1 + 1 pts)

On se place sur $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3, et on considère l'application g définie par

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \longmapsto (2 - 6X)P + 2X^2P'. \end{cases}$$

1. Justifier que g est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. (a) Déterminer une base de $\text{Ker } g$ et une base de $\text{Im } g$.
(b) Le théorème du rang est-il vérifié ?
4. Montrer que g est une application bijective.

La fonction g donnée dans cet exercice est égale à $2f$, où f est la fonction définie dans l'exercice 2 du sujet A. La correction est identique, avec un coefficient 2 supplémentaire à prendre en compte dans les calculs.