

Interro n°2 (sujet A) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document ni appareil électronique ne sont autorisés.

Exercice 1 (1 + 1 + 2 pts)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x - 3y + 5z &= 2 \\ x + y + z &= -1 \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle.

Le système suivant est équivalent à l'équation

$$AX = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. À l'aide du calcul d'un déterminant, que peut-on dire sur le nombre de solutions du système ?

En effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$ nous obtenons :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne, nous en déduisons que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times (-2) - 8 \times (-1) = 10.$$

Ainsi, puisque $\det(A) \neq 0$, nous en déduisons que A est inversible. Il en résulte que le système admet une unique solution.

3. Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 8L_3]{L_3 \leftarrow -\frac{1}{10}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2]{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On trouve donc que la solution du système est $X = \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 (2 + 2 pts)

On rappelle que pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, on a $\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w)$. Dans la suite, on considère $u = (2, -2, 1)$, $v = (4, 4, 2)$ et $w = (-1, 0, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\langle u, v \rangle$ et $u \wedge v$.

On applique nos formules du produit scalaire et du produit vectoriel. D'une part,

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 4 - 2 \times 4 + 1 \times 2 = 2.$$

D'autre part,

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} -2 \times 2 - 1 \times 4 \\ 1 \times 4 - 2 \times 2 \\ 2 \times 4 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} = 8w.$$

2. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v, w .

Le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v, w est donné par :

$$V = |\det(u, v, w)| = |\langle u \wedge v, w \rangle| = |\langle 8w, w \rangle|$$

et par linéarité du produit scalaire, on a

$$V = 8 |\langle w, w \rangle| = 8 \|w\|^2 = 8 \times 5 = 40.$$

Exercice 3 (2 pts)

Calculer l'intégrale suivante.

On n'oubliera pas de justifier l'existence de cette intégrale.

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx.$$

Tout d'abord puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^3}$ est continue sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$, l'intégrale est bien définie.

Ensuite, pour calculer cette intégrale on reconnaît une forme remarquable $u'u^n$ dont la primitive est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$, en multipliant par 2 le numérateur. Ainsi, une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^3}$ est donnée par $x \mapsto \frac{(x^2+1)^{-2}}{-2}$. Il en résulte que

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x^2+1)^2} \right]_0^1 = \frac{3}{16}.$$

Interro n°2 (sujet B) - Correction

Durée : 24 minutes. Aucun document ni appareil électronique ne sont autorisés.

Exercice 1 (1 + 1 + 2 pts)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= -1 \\ x - 3y + 2z &= -1 \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle.

Le système suivant est équivalent à l'équation

$$AX = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. À l'aide du calcul d'un déterminant, que peut-on dire sur le nombre de solutions du système ?

En effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ nous obtenons :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne, nous en déduisons que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 1 - (-1) \times (-5) = -8.$$

Ainsi puisque $\det(A) \neq 0$, nous en déduisons que A est inversible. Il en résulte que le système admet une unique solution.

3. Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2]{L_3 \leftarrow \frac{3}{8}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3, L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

On trouve donc que la solution du système est $X = (-2, 1, 2)$.

Exercice 2 (2 + 2 pts)

On rappelle que pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, on a $\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w)$. Dans la suite, on considère $u = (2, 0, 4)$, $v = (1, 3, 1)$ et $w = (2, -1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\langle u, v \rangle$ et $u \wedge v$.

On applique nos formules du produit scalaire et du produit vectoriel. D'une part,

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 1 - 0 \times 3 + 4 \times 1 = 6.$$

D'autre part,

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \times 1 - 4 \times 3 \\ 4 \times 1 - 2 \times 1 \\ 2 \times 3 - 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v, w .

Le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v, w est donné par :

$$V = |\det(u, v, w)| = |\langle u \wedge v, w \rangle| = |-12 \times 2 + 2 \times (-1) + 6 \times 1| = 20.$$

Exercice 3 (2 pts)

Calculer l'intégrale suivante.

On n'oubliera pas de justifier l'existence de cette intégrale.

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 - 4} dt.$$

Tout d'abord puisque la fonction $t \mapsto \frac{t}{t^2 - 4}$ est continue sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$, l'intégrale est bien définie.

Ensuite, pour calculer cette intégrale on reconnaît une forme remarquable $\frac{u'}{u}$ dont la primitive est $\ln(|u|)$, en multipliant par 2 le numérateur. Ainsi, une primitive de $t \mapsto \frac{2t}{t^2 - 4}$ est donnée par $t \mapsto \ln(|t^2 - 4|)$. Il en résulte que

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 - 4} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{t^2 - 4} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(|t^2 - 4|) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln(3) - \ln(4) \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$